Zur Theorie der Abbildung mittels gebrochener rationaler Functionen.

Von Dr. **Otto Biermann.**

Herr Prof. Weierstrass hat in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 12. August 1880 die Aufgabe gestellt, eine nach rationalen Functionen fortschreitende unendliche Reihe zu bilden, welche in den verschiedenen von einander getrennten Stücken $A_1, A_2 \ldots A_n$ ihres Bereiches gleichmässiger Convergenz eindeutige und monogene Functionen $F_1(z), F_2(z) \ldots F_n(z)$ mit einer endlichen Anzahl wesentlich singulärer Stellen darstellt.

Zu diesem Zwecke bildet er erst eine Reihe rationaler Functionen $\chi(z)$, „welche in der Nähe jeder Stelle, wo der reelle Theil von z nicht Null ist, gleichmässig convergirt und den Werth $+1$ oder -1 hat, je nachdem der reelle Theil von z positiv oder negativ ist". Bedeutet dann Z eine rationale Function von z, so ist auch

$$\chi(Z) = \chi_1(z)$$

eine unendliche Reihe rationaler Functionen, und weil die der imaginären Axe der Z-Ebene entsprechende algebraische Curve die z-Ebene derart theilt, dass die Gebiete, wo der reelle Theil von Z negativ ist, von denjenigen getrennt sind, wo derselbe positiv ist, besitzt $\chi_1(z)$ in den ersteren Gebieten den Werth -1, in den letzteren den Werth $+1$. Mit Hilfe solcher Reihen ist es dann ein Leichtes, arithmetische Ausdrücke der verlangten Art zu bilden. —

Die in Folge einer rationalen gebrochenen, abbildenden Function $Z = f(z)$ der imaginären Axe und jeder beliebigen Geraden der Z-Ebene entsprechende algebraische Curve hat Hr. G. Holzmüller[1] untersucht. Ich will hier seinen Sätzen

[1] Holzmüller: Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften (Leipzig 1882.

einige hinzufügen, mit deren Hilfe eine genaue Beschreibung der einfachsten dieser Curven möglich ist; die denselben hier beigelegte Bedeutung soll später wieder berücksichtigt werden.

Vor Allem recapituliren wir die Untersuchungen Holzmüller's. Es sei

$$Z = f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

eine abbildende Function, wo $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ ganze rationale Functionen vom m und n^{ten} Grade bedeuten, deren höchste Potenzen den Coëfficienten 1 besitzen.

Die Geometrie der Z-Ebene kann man in die der z-Ebene übertragen, wenn man weiss, in welche Curven Gerade und Kreise übergehen.

Der durch den Nullpunkt gehenden Geraden mit dem Richtungswinkel $\theta = \gamma$ entspricht die sogenannte irreguläre Hyperbel $\left(\frac{m}{n}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung, dem Kreise um den Nullpunkt:

$$\log R = c$$

die irreguläre Lemniscate $\left(\frac{m}{n}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung. Führt man die Bezeichnungen ein:

$$\varphi(z) = \prod_{\varepsilon=1}^{m} (x+iy - (a_\varepsilon + ib_\varepsilon)) \qquad \psi(z) = \prod_{\varepsilon=1}^{m} (x+iy - (\alpha_\varepsilon + i\beta_\varepsilon))$$

$$p_\varepsilon = \sqrt{(x-a_\varepsilon)^2 + (y-b_\varepsilon)^2} \qquad q_\varepsilon = \sqrt{(x-\alpha_\varepsilon)^2 + (y-\beta_\varepsilon)^2}$$

$$\varphi_\varepsilon = \arctan \frac{y-b_\varepsilon}{x-a_\varepsilon} \qquad \psi_\varepsilon = \arctan \frac{y-\beta_\varepsilon}{x-\alpha_\varepsilon}$$

so lauten die Gleichungen der Hyperbel und Lemniscate $\left(\frac{m}{n}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\sum_{\varepsilon=1}^{m} \varphi_\varepsilon - \sum_{\varepsilon=1}^{n} \psi_\varepsilon = \gamma \qquad \log \frac{p_1 p_2 \cdots p_m}{q_1 q_2 \cdots q_n} = c$$

Beliebigen Graden und Kreisen der Z-Ebene gehören gleichfalls solche Hyperbeln und Lemniscaten als entsprechende Curven zu.

Im Falle $m>n$ besitzen die Hyperbeln $m-n$ reelle Asymptoten, die unter dem Winkel $\frac{\pi}{m-n}$ aufeinander folgen. Darnach entsprechen der Geraden durch einen Punkt $(A+Bi)$ der Z-Ebene in der der z m von den zugehörigen Punkten ausgehende Curvenarme, und von diesen verlaufen $m-n$ asymptotisch ins Unendliche; die n übrigen gehen nach den Punkten $(\alpha_\varepsilon+i\beta_\varepsilon)$.

Ist $m<n$, so erledigt man die Abbildung durch

$$Z=\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$$

am einfachsten unter Zuhilfenahme der Substitution $Z=\frac{1}{z}$ und man sieht unmittelbar, dass bloss den Geraden durch den Nullpunkt Hyperbeln zugehören, welche $m-n$ reelle Asymptoten haben, indess die anderen Hyperbeln im Endlichen liegen.

In den folgenden Untersuchungen werden wir uns auf den ersten und den dritten noch möglichen Fall, wo $m=n$ ist, beschränken. Hier gilt, dass nur eine der zu einem Strahlenbüschel der Z-Ebene gehörigen Hyperbeln eine reelle Asymptote hat; allein die dem speciellen Büschel durch den Punkt $(Z)_{z=\infty}=1$ entsprechenden Curven besitzen sämmtlich reelle Asymptoten.

Auf Grund dieser Sätze schreiten wir fort.

Wir gehen von der der imaginären Axe der Z-Ebene entsprechenden Hyperbel aus, deren Gleichung die Form hat:

$$x^{m+n}+A_1\,x^{m+n-1}\,y+A_2\,x^{m+n-2}\,y^2+\ldots\ldots A_{m+n}\,y^{m+n}$$
$$B_1 x^{m+n-1}+B_2 x^{m+n-1}\,y+\ldots\quad B_{m+n}y^{m+n-1}+\ldots\quad K=0,\qquad 1)$$

wo alle Coëfficienten reell sind. — Um die Asymptoten dieser algebraischen Curve zu finden, bringen wir die Gleichung 1) auf die Form

$$x_1\,x_2\ldots x_{m+n}+k\mathfrak{L}_{m+n-2}=0,\qquad 2)$$

o x_ν $(\nu=1,2\,..\,m+n)$ die lineare Function

$$x + p_\nu y + q_\nu,$$

k eine Constante und Ω_{m+n-2} eine ganze Function der $(m+n-2)^{\text{ten}}$ Dimension in x und y ist; dann sind:

$$x + p_\nu y + q_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots \; m+n)$$

gerade die Gleichungen der verlangten Asymptoten. — Aus der Vergleichung der Coëfficienten gleichnamiger Glieder in 1) und 2) gehen für die Grössen $-p_\nu$ Bestimmungsgleichungen hervor, welche zeigen, dass $-p_\nu$ die Wurzeln der Gleichung

$$\xi^{m+n} + A_1 \xi^{m+n-1} + \ldots A_{m+n-1}\,\xi + A_{m+n} = 0 \qquad 3)$$

sind. Den nothwendig conjugirt imaginären Wurzeln allein entsprechen imaginäre Asymptoten, denn aus den Gleichungen für die Grössen q_ν folgt, dass die solchen Wurzeln $-p_\nu$ und $-p_\nu'$ entsprechenden Grössen q_ν und q_ν' ebenfalls conjugirt imaginär werden, indess die übrigen reell bleiben.

Die Gleichung 3) findet man dadurch aus der abbildenden Function:

$$Z = \frac{\alpha z^m + \beta z^{m-1} + \ldots . k}{\alpha' z^n + \beta' z^{n-1} + \ldots k'}.$$

wo $\quad m \geqq n \quad a = 1 \quad \beta = b_1 + ib_2 \ldots \quad k = k_1 + ik_2$

$\quad \alpha' = a'_1 + ia'_2 \quad \beta' = b'_1 + ib'_1 \ldots \quad k' = k'_1 + ik'_2$

sein möge, dass man den reellen Theil des Productes

$$(a'_1 - ia'_2)\,(x - iy)^m\,(x - iy)^n$$

nach der Division durch $a'_1 y^{m+n}$ und der Substitution:

$$\frac{x}{y} = \xi$$

gleich Null setzt. (a'_1 setzen wir von Null verschieden voraus.) Führen wir noch die Bezeichnungen ein

$$m+n = \lambda \quad m-n = \mu \quad -\frac{a'_2}{a'_1} = a,$$

so lautet die Gleichung 3):

$$\xi^\lambda - \alpha\mu\xi^{\lambda-1} - \left(\binom{\mu}{2} - \binom{\mu}{1}\right)\xi^{\lambda+2} + a\left(\binom{\mu}{3} - \binom{\mu}{1}\binom{n}{1}\right)\xi^{\lambda-3} + .$$

$$+(-1)^{k+1}a\left[\binom{\mu}{2k+1}-\binom{\mu}{2k+1}\binom{n}{1}+\ldots+(-)^k\binom{\mu}{1}\binom{n}{k}\right]\xi^{\lambda-2k-1}$$

$$+(-1)^{k+1}\left[\binom{\mu}{2k+2}-\binom{\mu}{2k}\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^{k+1}\binom{\mu}{0}\binom{n}{k+1}\right]\xi^{\lambda-2k-2}$$

$$+\ldots+\begin{cases}\pm a\left(\binom{\mu}{2}-\binom{n}{1}\right)\xi^2\pm\binom{\mu}{1}\xi\mp a=0\\ \pm\left(\binom{\mu}{2}-\binom{n}{1}\right)\xi^2\mp\binom{\mu}{1}\xi\mp 1=0\end{cases} \quad 4)$$

je nachdem

$$\mu\equiv 1,3,2,0 \text{ (mod. 4)}.$$

Für die entsprechende Hyperbel aus:

$$Z=\frac{\alpha' z_n+\beta' z^{n-1}+\quad k'}{z^m+\beta z^{m-1}+\ldots . k}$$

geht dieselbe Gleichung 4) ja dieselbe Gleichung 1) hervor. Natürlich sind aber die Zähler der imaginären Theile in der früheren und jetzigen Grösse Z verschieden.

Ist eine reelle Wurzel der Gleichung 4)

$$-p_1=\operatorname{cotg}\alpha,$$

so sind alle andern reellen Wurzeln:

$$\operatorname{cotg}\left(\alpha-\nu\frac{\pi}{\mu}\right)\quad(\nu=1,2\ldots\mu-1),$$

denn wir wissen, dass die Asymptoten unter dem Winkel $\frac{\pi}{\mu}$ aufeinander folgen. Jede reelle Wurzel hat somit die Eigenschaft, eine rationale Function jeder andern zu sein.

Wenn es uns nicht schon die Entstehungsweise der Gleichung verriethe, so könnten wir daraufhin schliessen, dass dieselbe reductibel sein muss, indem sich die imaginären Wurzeln nicht in die Reihe der rational zusammenhängenden einfügen lassen; und in der That zerfällt die Gleichung in das Product der zwei Gleichungen:

$$\xi^\mu-a\mu\,\xi^{\mu-1}-\ldots+\begin{cases}\pm\mu\xi\mp a=0\\ \mp a\mu\xi\mp=0\end{cases} \quad 5)$$

und

$$(\xi^2+1)^n=0.$$

So erfahren wir, dass n der Grössen $-p_\nu+i$, $n-i$ sind. Besitzt aber die Gleichung 3), wie in unserem Falle vielfache

Wurzeln, dann bedarf es erst einer näheren Untersuchung, ob die Gleichung 1) die Form 2) annehmen kann. — Denn setzt man entsprechend zwei Wurzeln $+i$, $-i$

$$q_{m-n+\nu} = \pi_\nu + \pi'_\nu i, \quad q'_{m-n+\nu} = \pi_\nu - \pi'_\nu i \quad (\nu = 1, \ldots n),$$

so fungiren in den $m+n$ Gleichungen für die Grössen

$$q_1, q_2 \ldots q_{m-n}, \pi_1, \pi_2 \ldots \pi_n, \pi'_1, \pi'_2 \ldots \pi'_n$$

nur $(m-n+2)$ Veränderliche, nämlich

$$q_1, q_2 \ldots q_{m-n}, \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \pi'_\nu.$$

Die Gleichungen lauten:

$$2\Sigma\pi_\nu + \sum_{\varepsilon=1}^{\mu} q_\varepsilon = B_1$$

$$2A_1\Sigma\pi_\nu + 2\Sigma\pi'_\nu + \Sigma q_\varepsilon(A_1 - p_\varepsilon) = B_2$$

$$2(A_2 - A_0)\Sigma\pi_\nu + 2A_1\Sigma\pi'_\nu + \Sigma q_\varepsilon(A_2 - p_\varepsilon A_1 + p_\varepsilon^2) = B_3$$

$$2(A_k - A_{k-2} + A_{k-4} - \ldots)\Sigma\pi_\nu + 2(A_{k-1} - A_{k-3} + A_{k-5} - \ldots)\Sigma\pi'_\nu$$
$$+ \Sigma q_\varepsilon(A_k - p_\varepsilon A_{k-1} + p_\varepsilon{}^2 A_{k-2} - \ldots + (-1)^k p_\varepsilon^k) = B_{k+1}$$

$$2A_{m+n}\Sigma\pi'_\nu + \Sigma q_\varepsilon \frac{A_{m+n}}{p_\varepsilon} = B_{m+n},$$

wo $A_0 = 1$ ist. Damit diese zusammen bestehen können, müssen nach Einführung der Bezeichnungen

$$A_k - p_\varepsilon A_{k-1} + p_\varepsilon^2 A_{k-2} - \ldots + (-1)^k . p_\varepsilon^k = N_k(p_\varepsilon)$$

$$A_k - A_{k-2} + \ldots + \left\{\begin{matrix} \pm A_0 \\ \pm A_1 \end{matrix}\right\} = M_k$$

— wo links $+A_0, -A_0, +A_1, -A_1$ gilt, je nachdem $k \equiv 0, 2, 1, 3$ (mod. 4) ist — folgende $2n-2$ Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\begin{vmatrix} B_1, & M_0, & 0, & 1, & 1 \\ B_2, & M_1, & M_0, & N_1(p_1), & N_1(p_\mu) \\ & & & & \\ B_{\mu+2}, & M_{\mu+2}, & M_{\mu+1}, & N_{\mu+2}(p_1), & N_{\mu+2}(p_\mu) \\ B_{\mu+2+i}, & M_{\mu+2+i}, & M_{\mu+1+i}, & N_{\mu+2+i}(p_1) & N_{\mu+2+i}(p_\mu) \end{vmatrix} = 0$$

$$(i = 1,2 \ldots 2n-2).$$

Hierin sind die Grössen B nach Einführung der weiteren Zeichen:

$$C_1 = b_1 - ab_2, \qquad D_1 = -ab_1 - b_2,$$
$$C_2 = \frac{b_1'}{a_1'}, \qquad D_2 = \frac{b_2'}{a_1'}:$$

$$B_1 = C_1 + C_2, \qquad B_2 = \left[\binom{\mu-1}{} D_1 + \binom{\mu+1}{1} D_2\right],$$

$$B_3 = -\left[\left(\binom{\mu-1}{} - \binom{n}{1}\right) C_1 + \left(\binom{\mu+1}{2} - \binom{n-1}{}\right) C_2\right],$$

$$B_{2k+1} = (-1)^k \left[\left(\binom{\mu-1}{2k} - \binom{\mu-1}{2k-2}\binom{n}{1} + \quad . + (-1)^k \binom{n}{k}\right) C_1\right.$$
$$\left. + \left(\binom{\mu+1}{2k} - \binom{\mu+1}{2k-2}\binom{n-1}{} + . \quad . + (-1^k)\binom{n-1}{k}\right) C_2\right]$$

$$B_{2k+2} = (-1^k)\left[\left(\binom{\mu-1}{2k+1} - \binom{\mu-1}{2k-1}\binom{n}{1} + \ldots + (-1^k)\binom{\mu-1}{}\binom{n}{k}\right) D_1\right.$$
$$\left. + \left(\binom{\mu+1}{2k+1} - \binom{\mu+1}{2k+1}\binom{n-1}{} + . \quad . + (-1^k)\binom{\mu+1}{1}\binom{n-1}{k}\right) D_2\right]$$

$$B_{m+n} = \begin{cases} \pm C_1 \mp C_2 \\ \pm D_1 \mp D_2 \end{cases}, \text{ je nachdem } \mu \equiv 1,\ 3,\ 2,\ 0 \pmod{4}.$$

Es lässt sich zeigen, dass die Bedingungsgleichungen immer erfüllt sind, doch hier wollen wir uns nur in dem einfachen Falle $m=n$ davon überzeugen. Die Grössen A sind:

$$A_{2k} = \binom{m}{k} \qquad A_{2k+1} = 0.$$

Die Gleichungen für

$$\sum_{\nu=1}^{m} \pi_\nu \text{ und } \sum_{\nu=1}^{m} \pi'_\nu$$

lauten

$$2\binom{m-1}{k} \Sigma\pi_\nu = B_{2k+1}, \qquad 2\binom{m-1}{k} \Sigma\pi'_\nu = B_{2k+2},$$

$$(k = 0\ 1,2\ldots m-1)$$

die Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen B:

$$B_{2k+1} = \binom{m-1}{k} B_1 \qquad B_{2k+2} = \binom{m-1}{k} B_2$$

und diese sind in der That erfüllt, indem

$$B_1 = C_1 + C_2, \qquad B_{2k+1} = \binom{m-1}{k} (C_1 + C_2);$$

$$B_2 = -D_1 + D_2, \qquad B_{2k+2} = \binom{m-1}{k} (D_1 + D_2) \text{ ist.}$$

Diese Werthe ergeben sich aus den oben angegebenen, wenn man

$$\binom{-1}{2k} = 1, \qquad \binom{-1}{2k+1} = -1$$

setzt.

Wenn nun die Bedingungsgleichungen befriedigt sind, können wir $2\,(n-1)$ der Grössen π_ν und π'_ν willkürlich wählen, insbesondere

$$\pi_1 = \pi_2 = \qquad \pi_n = \pi,$$
$$\pi'_1 = \pi'_2 = \qquad \pi'_n = \pi'.$$

Dann aber folgt, dass die Gleichung unserer Hyperbel $\left(\frac{m}{n}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung auf die Form gebracht werden kann:

$$\prod_{\varepsilon=1}^{m-n} (x + p_\varepsilon y + q_\varepsilon) \cdot [(x + iy + \pi + i\pi') \cdot (x - iy + \pi - i\pi')]^n$$
$$+ k\Omega_{m+n-2} = 0$$

oder:

$$\prod_{\varepsilon=1}^{m-n}(x+p_\varepsilon y+q_\varepsilon).((x+\pi)^2+(y+\pi')^2)^n+k\Omega_{m+n-2}=0.$$

Die Gleichung der Hyperbel $\left(\frac{m}{m}\right)$ter Ordnung erhält die Form:

$$\left(x+\frac{C_1+C_2}{m}\right)^2+\left(y+\frac{-D_1+D_2}{2\,m}\right)^2+k\Omega_{2m+n-2}=0.$$

Die Constante k und die Coëfficienten der ganzen Function Ω_{m+n-2} sind dann im Allgemeinen vollkommen bestimmt.

Wir sehen jetzt, dass die imaginären Asymptoten der Hyperbel $\left(\frac{m}{n}\right)$ter Ordnung alle durch den Mittelpunkt des Systems concentrischer Kreise

$$(x+\pi)^2+(y+\pi')^2=r^2$$

hindurchgehen. —

Für die reellen Asymptoten der Hyperbel $m$ter Ordnung können wir sehr leicht zeigen, dass sie ebenfalls durch einen Punkt gehen, und zwar durch den Schwerpunkt der durch die Wurzeln der abbildenden Function

$$Z=f(z)=\prod_{\varepsilon=1}^{m}(z-(a_\varepsilon+ib_\varepsilon))=z^m+\beta z^{m-1}+.\ \ .k$$

bestimmten Punktgruppe.[1]

Führt man an Stelle z die lineare Function ein:

$$z=-\frac{\beta}{m}+\zeta,$$

was nur auf einer Parallelverschiebung der Gebilde in der z-Ebene hinausläuft, so wird

$$Z=f_1(\zeta)=\zeta^m+\gamma_1\zeta^{m-2}+\ldots k_1$$

Die Asymptoten der der imaginären Axe $X=0$ entsprechenden Hyperbel $m$ter Ordnung haben die Form:

$$x'+py'=0$$

[1] Siehe Holzmüller, l. c. p. 205, die Anmerkung.

— wenn $\zeta = x' + iy'$ gesetzt wird — und hier ist offenbar, dass die m reellen Asymptoten durch den Nullpunkt der ζ-Ebene gehen, welchem in der z-Ebene der Punkt

$$x_1 = -\frac{b_1}{m} \qquad y_1 = -\frac{b_2}{m}$$

entspricht. Das ist nun in der That der Schwerpunkt, denn es gilt:

$$b_1 = -\sum_{\varepsilon=1}^{m} a_\varepsilon, \qquad b_2 = -\sum_{\varepsilon=1}^{m} b_\varepsilon.$$

Durch ein ähnliches Verfahren beweist man, dass die $(m-n)$ reellen Asymptoten der aus

$$Z = \frac{\prod_{\varepsilon=1}^{m} (z-(a_\varepsilon+ib_\varepsilon))}{\prod_{\varepsilon=1}^{n} (z-(\alpha_\varepsilon+i\beta_\varepsilon))} \qquad A)$$

hervorgehenden Hyperbel durch den Punkt

$$x_1 = \frac{\Sigma a_\varepsilon - \Sigma \alpha_\varepsilon}{m-n} \qquad y_1 = \frac{\Sigma b_\varepsilon - \Sigma \beta_\varepsilon}{m-n}$$

und die imaginären durch den Punkt

$$x_2 = \frac{\Sigma \alpha_\varepsilon}{n}, \qquad y_2 = \frac{\Sigma \beta_\varepsilon}{n}$$

hindurchgehen, und zwar ist der letztere Schwerpunkt der durch die Wurzeln des Nenners bestimmten Punktgruppe.

Die beiden Punkte $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$ fallen zusammen, wenn die Beziehungen

$$\frac{\Sigma a_\varepsilon}{m} = \frac{\Sigma \alpha_\varepsilon}{n} \qquad \frac{\Sigma b_\varepsilon}{m} = \frac{\Sigma \beta_\varepsilon}{n}$$

bestehen, d. h., wenn die Schwerpunkte der Punktgruppen des Zählers und Nenners zusammenfallen.

Stimmen alle Wurzeln des Nenners mit Wurzeln des Zählers überein, so geht der Punkt $(x_1\, y_1)$ in den Schwerpunkt eines Punktsystems

$$(a_\varepsilon + ib_\varepsilon) \quad (\varepsilon = 1, 2 \ldots \quad m-n)$$

über, das der abbildenden Function

$$Z = \Pi(z-(a_\varepsilon + i b_\varepsilon))$$

angehört.

Mit diesen Sätzen über die Asymptoten folgt, dass man die Gleichungen aller Asymptoten der aus *A)* hervorgehenden Hyperbel $\left(\frac{m}{n}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung angeben kann, sobald nur eine reelle Wurzel $-p_\nu = \operatorname{cotg} \alpha$ der Gleichung 5) bekannt ist; sie lauten:

$$x + \operatorname{cotg}\left(\alpha - \nu\frac{\pi}{\mu}\right) y - \frac{\Sigma a_\varepsilon - \Sigma \alpha_\varepsilon}{m-n} - \frac{\Sigma b_\varepsilon - \Sigma \beta_\varepsilon}{m-n} \operatorname{cotg}\left(a - \nu\frac{\pi}{\mu}\right) = 0$$

$$(\nu = 0, 1, 2 \ldots \mu - 1) \text{ und } x \pm iy - \frac{\Sigma\alpha_\varepsilon \pm i\Sigma\beta_\varepsilon}{n} = 0.$$

Die Eigenschaften der Hyperbel, welche der imaginären Axe der Z-Ebene entspricht, kommen auch den anderen Hyperbeln zu.

Verbinden wir mit der Z-Ebene eine andere Ebene Z' durch eine lineare Abbildungsfunction

$$Z = c_1 Z' + c_2,$$

so dass

$$Z' = \frac{1}{c_1}\left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} - c_2\right)$$

ist, so entspricht der Geraden

$$X' = 0$$

in der z-Ebene eine Hyperbel der früheren Art, in der Z-Ebene hingegen eine von den willkürlichen Constanten c, c_2 abhängige Gerade, und dadurch ist eine beliebige Gerade mit der zugehörigen Hyperbel in Verbindung gebracht. (Hier ist zugleich gezeigt, dass die frühere Wahl $\alpha = 1$, $a'_1 \gtrless 0$ keine Beschränkung herbeiführt.)

Dass unsere Sätze Ausnahmen erleiden, wenn es sich um Hyperbeln der Ordnung $\left(\frac{m}{m}\right)$ handelt, ist bereits in der Einleitung hervorgehoben. Man weiss, dass die Hyperbel der Ordnung $\left(\frac{1}{1}\right)$ ein Kreis ist, doch wenn die Gerade der Z-Ebene

durch das Inversionscentrum geht, entspricht der Geraden wieder eine Gerade und das ist die einzige Hyperbel $\left(\frac{1}{1}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung, die eine reelle Asymptote besitzt. — Nur dem Strahlenbüschel durch das Inversionscentrum entsprechen lauter Hyperbeln mit einer Asymptote.

Jedesmal bieten die Hyperbeln $\left(\frac{m}{m}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung in dem Büschel der z-Ebene ähnliche Besonderheiten dar.

Mit Hilfe der entwickelten Eigenschaften ist man nun auch im Stande, die algebraischen Curven genau zu beschreiben, welche zugleich Hyperbeln in unserem Sinne sind.

Wir wollen darauf eingehen, um wenigstens Gebiete der Ebene namhaft zu machen, in denen gewisse arithmetische Ausdrücke theils eine Function $F_1(x)$, theils $F_2(x)$ darstellen.

Unter den Curven zweiter Ordnung ist nur die gleichseitige Hyperbel und ein Paar aufeinander senkrechter Geraden eine Hyperbel zweiter Ordnung; der Kreis und die Gerade eine Hyperbel $\left(\frac{1}{1}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Unter den zerfallenden Curven dritter Ordnung sind nur die folgenden Hyperbeln 3ter respective $\left(\frac{2}{1}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung.

1. Die Hyperbel, deren Asymptoten unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ oder $2\frac{\pi}{3}$ zusammentreffen und eine durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehende Gerade, welche den von den Asymptoten gebildeten grösseren Winkel halbirt;
2. drei durch einen Punkt gehende Gerade, die unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ aufeinander folgen;
3. ein Kreis in Verbindung mit einer Geraden.

Die nicht zerfallenden Curven dritter Ordnung, welche zugleich Hyperbeln dritter Ordnung sind, sind durch die Eigenschaften der letzteren genügend characterisirt, aber es ist interessant zu sehen, wie diese Curven ineinander übergehen, sofern man die Wurzelpunkte der z-Ebene (d. h. die den Wurzeln des Polynoms $\varphi(z)$ entsprechenden Punkte) gegenüber fest angenom-

menen Asymptoten derartige Lagenänderungen vornehmen lässt, dass der Schwerpunkt der dreipunktigen Gruppe in den Schnittpunkt der drei Asymptoten fällt. Dabei erhält man nicht allein die Curven, welche der imaginären Axe, sondern auch die, welche dem Strahlenbüschel durch den Nullpunkt der Z-Ebene entsprechen.

Liegen die drei Wurzelpunkte z. B. in der Geraden, welche den von zwei aufeinander folgenden Asymptoten gebildeten Winkel halbirt, so besteht die Curve aus einem unendlichen Oval innerhalb dieser Asymptoten, dessen hyperbolische Zweige durch die beiden äusseren Wurzelpunkte gehen, und einem unendlichen Ast längs der dritten Asymptote, welcher im Unendlichen einen Inflexionspunkt besitzt.

Dreht man hierauf die die Wurzelpunkte enthaltende Gerade um den Schwerpunkt, so vereinigt sich der unendliche Ast mit dem näher liegenden hyperbolischen Arm zu einer unendlichen Schleife, und die Curve ist eintheilig.

Dreht man die Gerade, bis sie in eine Asymptote fällt, so besteht die Curve dritter Ordnung aus dieser Asymptote selbst und einer Hyperbel, deren Arme auf dieser senkrecht stehen.

Lassen wir nun einen Wurzelpunkt in den Schwerpunkt der beiden andern fallen, so bleibt die Gerade und eine Hyperbel erhalten. Dem ersten Fall entspricht eine gleichartig zerfallende Curve, dem zweiten aber eine zweitheilige Curve, welche ein unendliches Oval und einen unendlichen Ast mit einem Inflexionspunkt im Schwerpunkt besitzt, u. s. w.

Alle diese Verhältnisse sind so leicht zu übersehen, dass man auch bald zur Überzeugung gelangt, dass unter den Hyperbeln dritter Ordnung alle Curven dritter Ordnung enthalten sind, deren Asymptoten durch einen Punkt hindurchgehen.

Die Hyperbeln der Ordnung $\left(\frac{2}{1}\right)$ bestehen entweder aus einem endlichen Oval in Begleitung einer Serpentine oder eines conchoidalen Zweiges oder aber aus einer Serpentine oder einem conchoidalen Zweige allein, der längs der reellen Asymptote über den einen Wurzelpunkt des Zählers zu dem des Nenners und dann zu dem zweiten Wurzelpunkt des Zählers verlauft.

Die Serpentine kann gegenüber der Asymptote symmetrisch gestaltet sein, so dass der Schnittpunkt mit der Asymptote Inflexionspunkt ist und zwar dann, wenn der Wurzelpunkt des Nenners auf der Asymptote liegt und zugleich Schwerpunkt der Wurzelpunkte des Zählers ist.

Die Serpentine vereinigt sich mit dem Oval zu einer eintheiligen Curve mit einem Knotenpunkt, wenn die Wurzeln des Zählers zusammenfallen.

Der isolirte Punkt, eine parabolische Ausbreitung der Serpentine oder gar die unendliche Ausbreitung der Schleife kann nicht vorkommen.

Angenommen nun, es sei Z eine derartige Function von z, dass die der imaginären Axe entsprechende Hyperbel von der Ordnung $\left(\frac{2}{1}\right)$ und eine eintheilige Curve mit einem Knotenpunkt und einem Inflexionspunkt im Unendlichen sei, so hat man in

$$F(z) = \frac{F_1(z) - F_2(z)}{2} + \frac{F_1(z) + F_2(z)}{2} \chi(f(z))$$

einen arithmetischen Ausdruck, welcher innerhalb der Schleife und dem in dem Knotenpunkt an dieselbe stossenden Theil der Ebene $F_1(z)$, in dem übrigen Theil der Ebene aber $F_2(z)$ darstellt, wenn $\chi(f(z)$ in den ersten Gebieten den Werth $+1$, in den zweiten den Werth -1 hat; sollte die Vertheilung der Werthe von $\chi(f(z))$ gerade vertauscht sein, so stellt $F(z)$ in den ersten Gebieten $F_2(z)$, in dem zweiten $F_1(z)$ dar.

Ist z. B.

$$Z = f(z) = \frac{(z-1)^2}{z},$$

so tritt der erste Fall ein.

Denken wir $F(z)$ in der Umgebung einer innerhalb der Schleife gelegenen Stelle in eine Potenzreihe entwickelt, so kann diese über die Schleife nicht fortgesetzt werden, wenn $F(z)$ auch in dem an den Doppelpunkt der Schleife anstossenden Theil der Ebene die Fortsetzung von $F_1(z)$ darstellt.

Dem Überschreiten der Curve im Knotenpunkte entspricht natürlich eine zweimalige Änderung des Zeichens des reellen Theiles der Function $Z = f(z)$.

Wir beachten noch die in ein System von m-Curven zweiter Ordnung zerfallenden Hyperbeln der Ordnung $\left(\frac{m}{m}\right)$.

Wegen der Gleichungsform dieser Curven können jene nur Kreise sein, und am einfachsten wird man solche Kreissysteme erhalten, wenn man von den aus m Geraden bestehenden Hyperbeln m^{ter} Ordnung ausgeht und an Stelle z eine lineare Function einer Grösse z' substituirt. Da die Geraden der Hyperbel m^{ter} Ordnung einem Strahlenbüschel angehören, so sind die entstehenden Kreise Kreise eines Büschels, die unter dem Winkel aufeinander folgen, ebenso wie jene.

Dass hiemit nicht alle möglichen Kreissysteme gewonnen sind, sieht man leicht ein. Denken wir z. B. an die physikalische Eigenschaft der einem Strahlenbüschel und der orthogonalen Kreisschar entsprechenden Hyperbeln und Lemniscaten, die darin besteht, dass jene Strömungslinien, diese Spannungscurven für die durch die Wurzelpunkte des Zählers in die z-Ebene eintretende und die in den Wurzelpunkten des Nenners austretende Elektricität sind, so sieht man z. B., dass — im Falle die Wurzelpunkte des Zählers und Nenners in alternirender Folge auf einem Kreise liegen — der Kreis selbst eine Strömungscurve sein wird.

Ich habe zur Darstellung der Spannungscurven die Methode von Herrn A. Guébhard angewandt, um über die Strömungslinien einen Überblick zu gewinnen und unter Andern auch folgende Anordnung der Aus- und Einströmungsstellen getroffen:

Denkt man um die Ecken eines Quadrates Kreise gelegt, mit der halben Seite als Radius, so seien die vier Schnittpunkte der Kreise und der Seiten Einströmungsstellen, die vier Punkte der Kreise, welche zugleich den Diagonalen des Quadrates angehören, Ausströmungsstellen, dann finden sich unter den Strömungscurven die vier Kreise. — Ist

$$Z = \frac{\varphi_4(z)}{\psi_4(z)}, \qquad a)$$

die zugehörige abbildende Function und der reelle Theil von Z innerhalb eines und somit auch jedes Kreises negativ und dar-

nach in den zwei übrigen getrennten Stücken der Ebene positiv, so ist in den ersten Theilen der Ebene $\chi(Z)$ gleich -1, in den letztern gleich $+1$.

Sind ferner

$$z^{(1)},\ z^{(2)},\ z^{(3)},\ z^{(4)}$$

derartige lineare Functionen von z, dass der reelle Theil jeder derselben auf je einem der vier Kreise verschwindet und der reelle Theil im Mittelpunkt dieses selben Kreises positiv ist, so hat der Ausdruck

$$\chi(z^{(1)})+\chi(z^{(2)})+\chi(z^{(3)})+\chi!(z^{(4)})$$

ganz dieselben Eigenschaften wie $\chi(Z)$ unb besitzt allenthalben dieselben Werthe, ist also gleich $\chi(Z)$.

Darnach kann man die frühere Substitution a) ganz leicht bestimmen.
